Übungen zu Mathematik I
Blatt 5

Aufgabe 1: Entscheiden Sie, ob die folgenden Vektoren linear unabhängig sind, indem Sie die Determinante berechnen!

a) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

b) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung:

a) Die Determinante ist null, daher sind die Vektoren linear abhängig.

b) Die Determinante ist fünf, daher sind die Vektoren linear unabhängig.

c) Da wir nur zwei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ haben, können wir keine Determinante ausrechnen. Wir sehen aber, dass die Vektoren linear unabhängig sind, da z.B. auf Grund der dritten Koordinate der Faktor zur Linearkombination des Nullvektors bei $\vec{v}_2$ null sein muss. Dann muss auch der Faktor für $\vec{v}_1$ null sein.

Aufgabe 2: Wir betrachten die Primzahlfunktion $\pi(x)$, die verbal beschrieben folgende Abbildung definiert:

> Die Primzahlfunktion ordnet jeder reellen Zahl die größer oder gleich null ist die Anzahl der Primzahl zu, die nicht größer sind als die reelle Zahl.

a) Berechnen Sie $\pi(10)$.

b) Wie lauten Definitions- und Wertemenge der Primzahlunktion?

c) Überlegen Sie sich, wie der Funktionsgraph aussieht und beschreiben Sie diesen, ohne ihn zu zeichnen.

d) Zeichnen Sie die Funktion im Intervall $[0, 20]$. Überlegen Sie sich, wie sie am sinnvollsten vorgehen!

Hinweis: Wenn Sie nicht wissen, was unter Primzahlen verstanden wird, oder eine Primzahltabelle benötigen, suchen Sie bitte eigenständig im Internet!

Lösung:

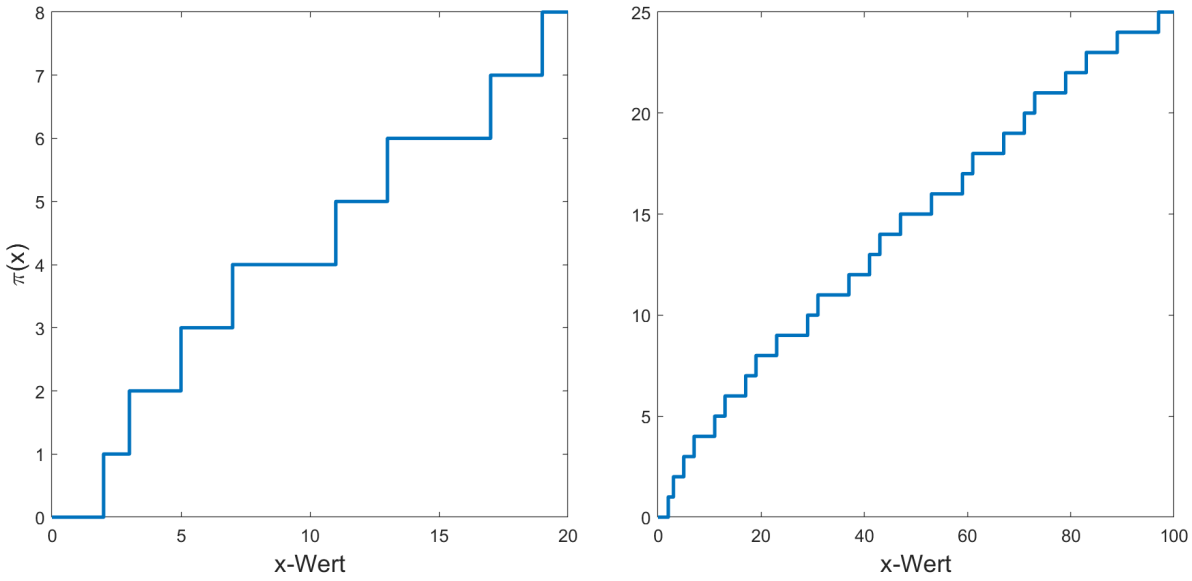


Abbildung 1: Primzahlfunktion in den Intervallen $[0, 20]$ und $[0, 100]$

a) Die Primzahlen unter zehn lauten: $2, 3, 5$ und 7, d.h. es existieren genau vier Primzahlen, die nicht größer sind als zehn, daher gilt $\pi(1) = 4$.

b) Da wir nur reelle Zahlen $x \geq 0$ betrachten ist $D = \mathbb{R}_0^+$, d.h. alle positiven rellen Zahlen und die Null sind erlaubt. Natürlich könnte man die Primzahlfunktion auch auf die negativen reellen Zahlen fortsetzen, z.B. durch null oder durch spiegeln.

   Da die Funktion die Anzahl der Primzahlen angibt und $\pi(0) = 0$ ist, erhalten wir $W = \mathbb{N}_0$, d.h. die Wertemenge besteht aus den natürlichen Zahlen inkl. der Null. Da es unendlich viele Primzahlen gibt, werden irgendwann auch alle natürlichen Zahlen als Funktionswert angenommen.

c) Die Funktion ändert sich nur an den Stellen $x = p$, wo x eine Primzahl p ist. Hier erhöht sich der Funktionswert um eins. In den Intervallen zwischen den Primzahlen ist die Funktion konstant. Wir erwarten also eine Treppenfunktion.

d) Zum Zeichnen sollte sinnvollerweise eine Wertetabelle angelegt werden. Hier genügt es die Primzahlen unter 20 zu betrachten, wie unter c) diskutiert. Den Funktionsgraphen zeigt Abb. 1.

Aufgabe 3: Das ideale Gasgesetz lautet:

$$p \cdot V = m \cdot R_s \cdot T \,,$$

wobei R_s die spezifische Gaskonstante beschreibt und p, m und V für den Druck, die Masse und das Volumen des Gases stehen.

a) Wir betrachten den Druck in Abhängigkeit von den anderen Größen. Stellen Sie eine Funktion auf. Wie lauten die Veränderlichen? Wie ändert sich der Druck, wenn das Volumen verkleinert wird? Überlegen Sie zuerst physikalisch und verifizieren Sie ihre Überlegungen mit Hilfe der Funktion.

b) Wie ändert sich die Temperatur, wenn wir den Druck erhöhen?

c) Wir halbieren die Masse. Wie ändert sich die Temperatur?

Lösung:

a) Die zugehörige Funktion erhalten wir bei Division durch V:

$$p(m, V, T) = \frac{m \cdot R_s \cdot T}{V}\,.$$

Wir betrachten den Druck in Abhängigkeit der Temperatur, Masse und des Volumens, daher sind m und V die Variablen. Die spezifische Gaskonstante ist eine Naturkonstante und daher nicht variable!

Das Volumen steht im Nenner der Funktion, d.h. wenn das Volumen verkleinert wird, wird der Bruch größer. Bei kleinerem Volumen ergibt sich also ein höherer Druck, was auch physikalisch sinnvoll ist, da wir das Gas komprimieren.

b) Wir betrachten nun die Temperatur in Abhängigkeit von Volumen, Masse und Druck:

$$T = \frac{p \cdot V}{m \cdot R_s}\,.$$

Der Druck steht im Zähler, d.h. bei größerem Druck wird der Bruch größer, was zu einer größeren Temperatur führt.

c) Die Masse steht im Nenner. Wird sie halbiert, so verdoppelt sich der Wert des gesamten Bruchs, daher verdoppelt sich auch die Temperatur.

Aufgabe 4: Der Zusammenhang zwischen angelegter Spannung U_D und fließendem Strom I_D im Durchlassbereich einer Diode wird näherungsweise von der Shockley-Gleichung beschrieben:

$$I_D(U_D) = I_S \cdot \left(e^{\frac{U_D}{n \cdot U_T}} - 1 \right)$$

Hierbei bezeichnet $I_s \approx 10^{-12} \ldots 10^{-6}$ A den Sperrstrom, $n \approx 1 \ldots 2$ den Emissionskoeffizienten und

$$U_T = \frac{k \cdot T}{q}$$

die Temperaturspannung, die bei Raumtemperatur ungefähr 25 mV beträgt. Hierbei ist T die absolute Temperatur, $k = 1,381 \cdot 10^{-23}$ Ws/K bezeichnet die Bolzmannkonstante und $q = 1,602 \cdot 10{-}19$ As die Elementarladung.

a) Wie hängt der Diodenstrom mit der Diodenspannung zusammen, d.h. was passiert, wenn die Spannung vergrößert oder verkleinert wird?

b) Was passiert wenn wir den Sperrstrom halbieren bzw. verzehnfachen?

c) Wir interessieren uns für die Temperaturabhängigkeit des Zusammenhangs, d.h. den Effekt, den eine Temperaturerhöhung oder -senkung hat. Überlegen Sie sich zuerst, wie sich U_T mit der Temperatur ändert. Übertragen Sie diese Ergebnisse dann auf die e-Funktion und den gesamten Ausdruck.

d) Welchen Einfluss hat es, wenn wir den Emissionskoeffizienten von $n = 1$ auf $n = 2$ erhöhen?

Lösung:

a) Die Spannung U_D steht im Zähler des Bruchs in der e-Funktion. D.h. eine Vergrößerung von U_D vergrößert auch die e-Funktion, da alle Werte positiv sind (d.h. wir haben e^x und nicht e^{-x}). Damit wird der gesamte Funktionsausdruck vergrößert und der Diodenstrom steigt. Analog fällt der Diodenstrom, wenn die Spannung fällt (vgl. Abb. 2). Die Kennlinien sind monoton wachsend.

b) Der Sperrstrom I_S wird mit dem Klammerausdruck multipliziert. Dieser ändert sich nicht. Daher geht eine Halbierung bzw. Verzehnfachung direkt auf den Diodenstrom über, dieser wird ebenfalls halbiert bzw. verzehnfacht.

c) Wir betrachten zuerst den Bruch:

$$U_T = \frac{k \cdot T}{q}$$

Die Temperatur T steht im Zähler, d.h. vergrößern wir die Temperatur, wird auch die Spannung U_T größer. Betrachten wir nun die e-Funktion:

$$e^{\frac{U_D}{n \cdot U_T}}$$

Da U_T im Nenner steht, wird der Bruch bei wachsendem U_T kleiner, d.h. mit wachsender Temperatur wird die e-Funktion kleiner und damit auch der Diodenstrom.

Bemerkung: In der Abbildung 2 wächst der Strom mit der Temperatur, was daran liegt, dass zusätzlich auch I_S von der Temperatur abhängt:

$$I_S(T) = I_S(T_0) \cdot \exp\left[\left(\frac{T}{T_0} - 1\right) \cdot \frac{U_G}{n \cdot U_T}\right] \cdot \left(\frac{T}{T_0}\right)^{x/n}$$

mit $x \approx 3$ und wobei U_T natürlich auch noch von der Zeit abhängt! Dies wurde in unserer Formel vernachlässigt.

d) Da der Emissionskoeffizienten wie U_T im Nenner des Bruchs in der e-Funktion steht, wird der Diodenstrom auch kleiner, wenn wir n vergrößern.

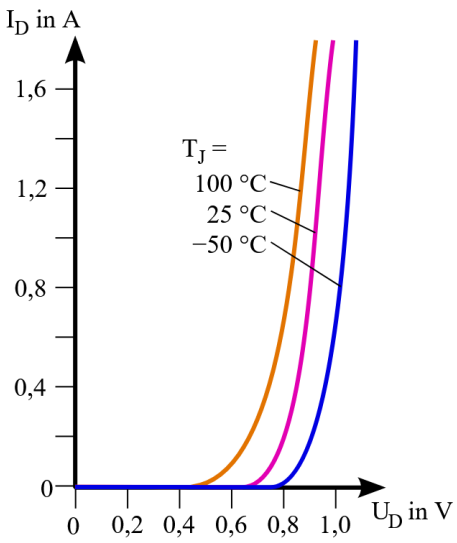


Abbildung 2: Beispiel für die temperaturabhängige Kennline einer Diode